カントール空間上の非空実効的閉集合の次数構造 (形式体系と計算理論)

樋口, 幸治郎

樋口, 幸治郎. カントール空間上の非空実効的閉集合の次数構造 (形式体系と計算理論). 数理解析研究所講究録 2011, 1729: 9-17

数理解析研究所講究録
第1729巻 2011年 9-17

カントール空間上の非空実効的閉集合の次数構造

樋口 幸治郎
sa7m24@math.tohoku.ac.jp
東北大学大学院理学研究科

1 背景

ベール空間 $\omega^\omega = \{f \mid f : \omega \to \omega\}$ の部分集合を**マス・プロブレム**と言う. Medvedev[7, 1955] は, マス・プロブレムの間に擬順序を導入し, この擬順序から自然に定義される同値関係の同値類とそれらの間の順序からなる構造を研究した. 今日では, この擬順序は**強還元可能性** $\leq_s$, この同値類は**強次数**, この構造は**強次数構造** $\mathcal{D}_s$ と呼ばれている. Medvedev は, 直観主義命題論理計算 IPC の意味論を与えるという目的で, 強次数構造 $\mathcal{D}_s$ を導入した. Medvedev[7] において, 彼は $\mathcal{D}_s$ がブラウワー代数になることを示した. したがって, $\mathcal{D}_s$ は自然な解釈によって, IPC のモデルとなる. しかし, 結局, $\mathcal{D}_s$ は IPC の意味論ではなく, ヤンコフ論理と呼ばれる IPC に弱排中律 $\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$ を加えた命題論理計算体系の意味論になることが明らかになった. Medvedev[7] の研究以後, 中間論理—つまり, 直観主義命題論理計算 IPC と古典命題論理計算 CPC の間の命題論理計算体系—と次数構造との関係が研究されている. その中でも優れた結果として, IPC の意味論となる $\mathcal{D}_s$ の始切片を, Skovortsova[16, 1988] が発見している. また, 最近までに知られている結果は, Sorbi&Terwijn[19, 2008] によくまとめられている.

現在では, Medvedev[7] で導入された強還元可能性 $\leq_s$ から定義される強次数構造 $\mathcal{D}_s$ の他に, Muchnik[9, 1963] により導入された弱還元可能性 $\leq_w$ から定義される弱次数構造 $\mathcal{D}_w$ がよく研究されている. この他にも Kihara[5, 2009] において, 束縛還元可能性 $\leq_b$ から定義される b 次数構造 $\mathcal{D}_b$ や学習還元可能性から定義される l 次数構造 $\mathcal{D}_l$ などが導入され, Kihara[5], Higuchi&Kihara[3] で研究されている. また, これらの次数構造の部分構造として, カントール空間 $2^\omega = \{f \mid f : \omega \to \{0,1\}\}$ 上の非空実効的閉集合 (= 非空 Π^0_1 クラス) の次数全体のなす部分次数構造 $\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_w, \mathcal{P}_b, \mathcal{P}_l$ が, よく研究されている. これらの部分次数構造は, すべて最大と最小次数を持つ可算分配束となることが知られている. また, 特に, $\mathcal{P}_w$ は, アルゴリズム的情報理論や計算理論, 逆数学などに関連した様々な自然な次数を持っていることが知られており [11, 10, 13], r.e. 集合の Turing 次数全体 $\mathcal{T}_T$ から $\mathcal{P}_w$ への自然な埋め込みの存在が Simpson[10] により示されている.

これらの部分次数構造 $\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_w, \mathcal{P}_b, \mathcal{P}_l$ と中間論理との関係を問うことは自然であろう. 実は, これらの部分構造は, $\mathcal{P}_l$ を除いて, そもそもブラウワー代数にならないことが示される. ($\mathcal{P}_l$ がブラウワー代数であるかどうかは, 今のところ分かっていない.) その上, これらの部分構造は, 全て,

ハイティング代数にならない—つまり, それらの双対の束が, ブラウワー代数にならない—ことが分かる. $\mathcal{P}_s$ がハイティング代数でないことは, Terwijn[20] により示された. $\mathcal{P}_w$ がブラウワー代数でないことは, Simpson[12] により示された. 筆者は, $\mathcal{P}_s$ がブラウワー代数でないこと, 及び, $\mathcal{P}_w$ がハイティング代数でないことを Higuchi[2] において示した. この論文では, $\mathcal{P}_b$ がブラウワー代数でもハイティング代数でもないことを示す.

2 準備

自然数全体の集合を $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$, ベール空間を $\omega^\omega = \{f \mid f : \omega \to \omega\}$, カントール空間を $2^\omega = \{f \mid f : \omega \to \{0, 1\}\}$, 自然数の有限列全体の集合を $\omega^{<\omega}$, 2 進有限列全体の集合を $2^{<\omega}$ で表す. ベール空間 ω^ω(resp. カントール空間 2^ω) には, ω(resp. $\{0, 1\}$) を離散空間とみなしたときの直積位相が入っていると考える. このとき, $2^\omega \subset \omega^\omega$ であり, チコノフの定理より, 2^ω はコンパクト空間である. $P, Q \subset \omega^\omega$ とする. P が Q に **s 還元可能**または**強還元可能** ($P \leq_s Q$) であるとは, 計算可能汎関数 $\Phi : Q \to P$ が存在すること, すなわち, 一様なアルゴリズムで Q の任意の要素から P のある要素を計算できること, を言う. P が Q に **w 還元可能**または**弱還元可能** ($P \leq_w Q$) であるとは, 任意の Q の要素が P のある要素を計算することを言う. つまり,

$$(\forall q \in Q)(\exists p \in P)[p \leq_T q]$$

であることを言う, ここで, $\leq_T$ はテューリング還元可能性を表す. $\{\Phi_e\}_{e \in \omega}$ をベール空間上の計算可能部分汎関数の計算可能な数え上げの一つとする. 以後, 一般に, A から B への部分関数 $F : A \supset\!\to B$ と $a \in A$ に対し, $a \in \mathrm{dom}(F)$(resp. $a \notin \mathrm{dom}(F)$) を $F(a)\downarrow$(resp. $F(a)\uparrow$) で表す. P が Q に **b 還元可能**または**束縛還元可能** ($P \leq_b Q$) であるとは,

$$(\exists b \in \omega)(\forall q \in Q)(\exists e \leq b)[\Phi_e(q) \downarrow \in P]$$

であることを言う. 次の章では扱わないが, l 還元可能性についても紹介する. $\alpha \in \omega^{\leq\omega} (= \omega^{<\omega} \cup \omega^\omega)$ に対し, $\mathrm{lh}(\alpha)$ で α の長さを表す. また $n \leq \mathrm{lh}(\alpha)$ に対して, $\alpha \upharpoonright n$ で,

$$\mathrm{lh}(\alpha) = n \text{ かつ } (\forall i < n)[\alpha(i) = (\alpha \upharpoonright n)(i)]$$

を満たすただ一つの $\omega^{\leq\omega}$ の要素を表す. 部分関数 $\Psi : \omega^{<\omega} \supset\!\to \omega$ が Q の**学習者**であるとは,

$$(\forall q \in Q)(\forall n \in \omega)[\Psi(q \upharpoonright n) \downarrow \text{ かつ } \lim_{n \to \infty} \Psi(q \upharpoonright n) \text{ が存在する}]$$

ことを言う. このとき, $\lim_{n \to \infty} \Psi(q \upharpoonright n)$ を $\Psi(q)$ で表す. P が Q に **l 還元可能**または**学習還元可能** ($P \leq_l Q$) であるとは, 計算可能な Q の学習者 Ψ が存在して,

$$(\forall q \in Q)[\Phi_{\Psi(q)}(q) \downarrow \in P]$$

であることを言う. 各 r 還元可能性 $\leq_r$(r$\in \{\mathrm{s, w, b, l}\}$) は, 明らかに, 擬順序 (反射的かつ推移的) であり,

$$P \leq_s Q \Longrightarrow P \leq_b Q \text{ かつ } P \leq_l Q$$

かつ

$$P \leq_b Q \text{ または } P \leq_l Q \Longrightarrow P \leq_w Q$$

である. P が Q に **r 同値** $(P \equiv_r Q)$ であるとは, $P \leq_r Q \leq_r P$ であることを言う. この二項関係は同値関係である. $\mathrm{dg}_r(P)$ で P の $\equiv_r$ についての同値類を表す, すなわち, $\mathrm{dg}_r(P) = \{Q \subset \omega^\omega \mid P \equiv_r Q\}$ とする. 同値類の集合 $\{\mathrm{dg}_r(P) \mid P \subset \omega^\omega\}$ を **r 次数構造** $\mathcal{D}_r$ と呼ぶ. $\mathcal{D}_r$ には, $\leq_r$ から自然に導入される順序が入っているものとする. P が Π^0_1 または**実効的閉集合**であるとは, ある計算可能な関係 $R \subset \omega^{<\omega}$ が存在して, $P = \{p \in \omega^\omega \mid (\forall n \in \omega)[R(f \restriction n)]\}$ であることを言う. $\{\mathrm{dg}_r(P) \mid \emptyset \neq P \subset 2^\omega \text{かつ} P \text{ は} \Pi^0_1\}$ を $\mathcal{P}_r$ で表す.

各 r$\in \{\mathrm{s}, \mathrm{w}, \mathrm{b}, \mathrm{l}\}$ について, $\mathcal{P}_r$ は最大要素 **1**, 及び, 最小要素 **0** を持つ分配束を成す. ペアノ算術の無矛盾完全拡大全体の集合を PA で表す. ペアノ算術の論理式にゲーデル数が割り当てられていると考えて, PA の各要素は自然数の集合であるとみなすことができる. さらに, 自然数の集合とその特性関数を同一視すれば, PA$\subset 2^\omega$ である. PA は Π^0_1 である. また, 完全性定理より空でなく, 不完全性定理より計算可能な要素を持たない. 実は, $\mathrm{dg_r(PA)} = \mathbf{1}$ となることが知られている [14]. 空でない Π^0_1 クラス $P \subset 2^\omega$ について,

$$\mathrm{dg}_r(P) = \mathbf{0} \iff P \text{ は計算可能な要素を持つ}$$

が成り立つ. $p_0, p_1, q \in \omega^\omega$ と $n \in \omega$ に対し, $p_0 \oplus p_1 \in \omega^\omega$ を, 任意の $x \in \omega$ と $i \in \{0,1\}$ に対して $(p_0 \oplus p_1)(2x+i) = p_i(x)$ で定まる関数とし, $nq \in \omega^\omega$ を $(nq)(0) = n$ かつ $(nq)(x+1) = q(x)$ で定まる関数とする. また, $P, Q \subset \omega^\omega$ に対し,

$$P \vee Q = \{p \oplus q \mid p \in P \text{ かつ } q \in Q\}$$

と定め, $nP = \{np \mid p \in P\}$ として,

$$P \wedge Q = 0P \cup 1Q$$

と定める. すると, $\sup\{\mathrm{dg}_r(P), \mathrm{dg}_r(Q)\} = \mathrm{dg}_r(P \vee Q)$ と $\inf\{\mathrm{dg}_r(P), \mathrm{dg}_r(Q)\} = \mathrm{dg}_r(P \wedge Q)$ が成り立つことが分かり, また, $\mathcal{P}_r$ が分配束を満たすことも容易に示すことができる.

最大 **1** と最小 **0** を持つ分配束 $\mathcal{L}$ が**ブラウワー代数**であるとは, 任意の $a, b \in \mathcal{L}$ に対し, $\{x \in \mathcal{L} \mid \sup\{a, x\} \geq b\}$ に最小要素 $a \Rightarrow b$ が存在することを言う. また, $\mathcal{L}$ が**ハイティング代数**であるとは, $\mathcal{L}$ の双対の束 $\mathcal{L}^d$ がブラウワー代数であることを言う, 言い換えれば, 任意の $a, b \in \mathcal{L}$ に対し, $\{x \in \mathcal{L} \mid \inf\{a, x\} \leq b\}$ に最大要素 $a \Rightarrow b$ が存在することを言う. Terwijn[20] において, $\mathcal{P}_s$ がハイティング代数でないことが示され, Simpson[12] において, $\mathcal{P}_w$ がブラウワー代数でないことが示された. また, Higuchi[2] において, $\mathcal{P}_s$ がブラウワー代数でないこと, 及び, $\mathcal{P}_w$ がハイティング代数でないことが示されている. 次の章で, $\mathcal{P}_b$ がブラウワー代数でもハイティング代数でもないことを示す. $\mathcal{P}_l$ については, 以後は扱わないが, 実は, ハイティング代数でないことを示すことができる. $\mathcal{P}_l$ がブラウワー代数になるかどうかは分かっていない.

各 r 還元可能性について, $\mathcal{P}_r$ がブラウワー代数でないことを示すには, ある空でない Π^0_1 クラス $P, Q \subset 2^\omega$ で, 任意の Π^0_1 クラス $R \subset 2^\omega$ で $P \vee R \geq_r Q$ を満たす R に対して,

$$R' \not\geq_r R \text{ かつ } P \vee R' \geq_r Q$$

を満たす空でない Π^0_1 クラス $R' \subset 2^\omega$ が存在するような P, Q が見つかれば良い. 同様に, $\mathcal{P}_r$ がハイティング代数でないことを示すには, ある空でない Π^0_1 クラス $P, Q \subset 2^\omega$ で, 任意の Π^0_1 クラス $R \subset 2^\omega$ で $P \wedge R \leq_r Q$ を満たす R に対して,

$$R' \not\leq_r R \text{ かつ } P \wedge R' \leq_r Q$$

を満たす空でない Π^0_1 クラス $R' \subset 2^\omega$ が存在するような P, Q が見つかれば良い. 次の定理 1 は, カントール空間 2^ω 上の Π^0_1 クラスを構成する際に役に立つ. $T \subset \omega^{<\omega}$ が**木**であるとは,

$$(\forall \sigma \in T)(\forall i < \mathrm{lh}(\sigma))[\sigma \restriction i \in T]$$

であるときを言う. このとき, $T \subset 2^{<\omega}$ であれば, T を**二分岐木**と言う. 木 $T \subset \omega^{<\omega}$ に対し, $[T]$ を T の道全体の集合, つまり, $[T] = \{f \in \omega^\omega \mid (\forall n \in \omega)[f \restriction n \in T]\}$ と定める.

定理 1 (See Alfeld[1]). *$P \subset 2^\omega$ に対し, 以下は同値である:*
1. P は Π^0_1 である;
2. ある計算可能な二分岐木 $T_P \subset 2^{<\omega}$ が存在して, $P = [T_P]$ である;
3. ある計算可能な二分岐木の計算可能な列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ が存在して, $P = \bigcap_{i\in\omega}[T_i]$ である. ;
4. ある計算可能な有限二分岐木の計算可能な増加列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ と計算可能な増加関数 $l \in \omega^\omega$ が存在して, $P = [\bigcup_{i\in\omega} T_i]$ かつ任意の $i \in \omega$ に対して $L(T_i) \restriction l(i) = L(T_{i+1}) \restriction l(i)$ である. □

上の定理について, ケーニヒの補題より, Π^0_1 クラス P が空でないことと, P に対する計算可能な二分岐木 T_P が無限集合であることは同値である. 一般に木 $T \subset \omega^{<\omega}$ に対し, $\lambda \in T$ が**葉**であるとは, 各 $i \in \omega$ について, $\lambda i \notin T$ であることを言う. 計算可能な二分岐木 T に対して, 葉全体の集合は計算可能である. さらに, $[T]$ が空でなく, しかも, 計算可能な要素を持たない場合, 任意の $\sigma \in T$ の先に, T の葉が存在しなければならない. また, したがって, 葉全体の集合は無限集合でなければならない. 空でない Π^0_1 クラス P で計算可能な要素を持たない P に対して, T_P の葉全体の計算可能な列を一つ固定し, $\{\lambda(P;i)\}_{i\in\omega}$ でそれを表すことにする. 再帰的要素を持たない空でない Π^0_1 クラス P と計算可能な要素を持たない空でない Π^0_1 クラスの計算可能な列 $\{P_n\}_{n\in\omega}$ に対して, $P \bigwedge_{n\in\omega} P_n$ を

$$P \bigwedge_{n\in\omega} P_n = P \cup \bigcup_{n\in\omega} \lambda(P;n)P_n, \quad \text{但し, } \lambda(P;n)P_n = \{\lambda(P;n)p \mid p \in P_n\},$$

と定める. また, $e \in \omega$ に対し, $P \bigwedge_{n\in\omega\setminus\{e\}} P_n = P \cup \bigcup_{n\in\omega\setminus\{e\}} \lambda(P;n)P_n$ と定め, さらに, 計算可能な要素を持たない空でない Π^0_1 クラスの計算可能な列 $\{P^0_n\}_{n\in\omega}, \cdots, \{P^{e+1}_n\}_{n\in\omega}$ に対し, 再帰的に,

$$P \bigwedge_{n\in\omega} P^0_n \bigwedge \cdots \bigwedge_{n\in\omega} P^e_n \bigwedge_{n\in\omega} P^{e+1}_n = P \bigwedge_{n\in\omega} P^0_n \bigwedge \cdots \bigwedge_{n\in\omega} (P^e_n \bigwedge_{n\in\omega} P^{e+1}_n)$$

と定める. $P \bigwedge_{n\in\omega} P_n$, $P \bigwedge_{n\in\omega\setminus\{e\}} P_n$, 及び, $P \bigwedge_{n\in\omega} P^0_n \bigwedge \cdots \bigwedge_{n\in\omega} P^e_n$ は全て計算可能な要素を持たない空でない Π^0_1 クラスになる.

次の定理 2 は Jockusch&Soare[4] により得られた定理である．我々は，二つの主定理において，定理 2 を利用する．$S \subset 2^\omega$ が**分離クラス**であるとは，ある r.e. 集合 (再帰的枚挙可能集合)A, B に対して，

$$S = \{f \in 2^\omega \mid f^{-1}(0) \supset A \text{ かつ } f^{-1}(1) \supset B\}$$

であるときを言う．分離クラスは Π^0_1 クラスであり，さらに，A, B に交わりがなければ空でない．$\langle\cdot,\cdot\rangle : \omega \times \omega \to \omega$ を計算可能な全単射であるとする．ω^ω の要素の列 $\{f_e\}_{e\in\omega}$ に対して，$\bigoplus_{e\in\omega} f_e$ を

$$(\forall e, x \in \omega)[(\bigoplus_{e\in\omega} f_e)(\langle e, x\rangle) = f_e(x)]$$

を満たすただ一つの関数として定める．このとき，各 $e \in \omega$ について，$f_e \leq_T \bigoplus_{n\in\omega} f_n$ である．また，任意の $e \in \omega$ について，入力 $\langle n, x\rangle \in \omega$ に対し，

$$(\bigoplus_{m\in\omega\setminus\{e\}} f_m)(\langle n, x\rangle) = \begin{cases} f_n(x) & n \neq e \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

を出力とするただ一つの関数として定める．

定理 2 (See Jockusch&Soare[4])**.** 空でない分離クラスの計算可能な列 $\{S_e\}_{e\in\omega}$ が存在して，任意の列 $\{f_e\}_{e\in\omega}$ で

$$(\forall e \in \omega)[f_e \in S_e]$$

を満たすとき，

$$(\forall i \in \omega)[f_i \not\leq_T \bigoplus_{e\in\omega\setminus\{i\}} f_e]$$

が成り立つ． □

上の定理について，特に，$f \in S_e$ かつ $n \neq e$ ならば，$S_n \not\leq_w \{f\}$ である．よって，S_e はそれぞれ計算可能な要素を持たない．また，$\mathrm{PA} \geq_w S_i$ であるから，$\{\bigoplus_{e\in\omega\setminus\{i\}} f_e\} \not\geq_w \mathrm{PA}$ である．

3 $\mathcal{P}_b$ の順序構造

定理 3. $\mathcal{P}_b$ はブラウワー代数ではない．

Proof. 以下を満たす空でない Π^0_1 クラス $P, Q \subset 2^\omega$ と空でない Π^0_1 クラスの計算可能な列 $\{R_e\}_{e\in\omega}$ を構成すれば良い:

$$(\forall e \in \omega)[P \vee R_e \geq_b Q], \tag{1}$$

かつ，任意の空でない Π^0_1 クラス $R \subset 2^\omega$ で $P \vee R \geq_b Q$ を満たす R に対して，

$$(\exists e \in \omega)[R \not\leq_b R_e]. \tag{2}$$

定理 2 の $\{S_e\}_{e\in\omega}$ を取る. P, Q, 及び, $\{R_e\}_{e\in\omega}$ を

$$P = \mathrm{PA} \bigwedge_{n\in\omega} P_n, \qquad 但し, P_e = S_{\langle e,0\rangle} \bigwedge_{n\in\omega} S_{\langle e,1\rangle} \bigwedge_{n\in\omega} \cdots \bigwedge_{n\in\omega} S_{\langle e,e\rangle},$$

$$R_e = S_{\langle e,e+1\rangle},$$

$$Q = \mathrm{PA} \bigwedge_{n\in\omega} Q_n, \qquad 但し, Q_{\langle e,i\rangle} = \begin{cases} S_i \vee R_e & i \le e のとき, \\ (\mathrm{PA} \bigwedge_{n\in\omega\setminus\{e\}} P_n) \vee R_e & \text{i=e+1}のとき, \\ \emptyset & それ以外のとき \end{cases}$$

と定める.

(1) を示す. $e \in \omega$ を任意に取る. 各 $i \le e$ に対し, k_i を次のような計算可能部分汎関数のインデックスとする: 入力 $p \oplus r \in \omega^\omega$ に対し, $\lambda(\mathrm{PA}; j_0)\lambda(S_{\langle e,0\rangle}; j_1)\cdots\lambda(S_{\langle e,i-1\rangle}; j_i)p' = p$ を満たす $j_0, \cdots, j_i \in \omega$ を探しだし, あれば, $\lambda(\mathrm{PA}; \langle e,i\rangle)(p' \oplus r)$ を計算し, 出力する. また, k_{e+1} を次のような計算可能部分汎関数のインデックスとする: 入力 $p \oplus r \in \omega^\omega$ に対し, $\lambda(\mathrm{PA}; \langle e, e+1\rangle)(p \oplus r)$ を計算し, 出力する. $b = \max\{k_0, \cdots, k_{e+1}\}$ と定めれば, 明らかに,

$$(\forall p \oplus r \in P \vee R_e)(\exists k \le b)[\Phi_k(p \oplus r) \downarrow\in Q]$$

が成立する. よって, (1) が成立する.

次に, $R \subset 2^\omega$ を $P \vee R \ge_b Q$ を満たす空でない Π^0_1 クラスとして, (2) を示す. $b \in \omega$ を,

$$(\forall p \oplus r \in P \vee R)(\exists e \le b)[\Phi_e(p \oplus r) \downarrow\in Q]$$

を満たすものとして取る. $R \not\le_b R_{b+1}$ を示す, そのためには, 任意の $r \in R_{b+1}$ に対して, $R \not\le_w \{r\}$ を示せば十分である. 任意に $r \in R_{b+1}$ を固定する. 背理法で, $R \not\le_w \{r\}$ を示す. $r' \in R$ が存在して, $r' \le_T r$ であると仮定してみる.

$$p_0 \in \lambda(\mathrm{PA}; b+1)S_{\langle b+1,0\rangle}$$

を一つ取る. このとき, $e_0 \le b$ が存在して, $\Phi_{e_0}(p_0 \oplus r') \downarrow\in Q$ が成立する. しかし, $\Phi_{e_0}(p_0 \oplus r') \le_T p \oplus r$ であるから, $\lambda(\mathrm{PA}; \langle b+1, 0\rangle) \subset \Phi_{e_0}(p_0 \oplus r')$ である. そこで, 十分長い有限列 $\sigma_0 \subset p_0$ を取れば, 任意の $f \in [\sigma_0](= \{g \in 2^\omega \mid g \upharpoonright \mathrm{lh}(\sigma_0) = \sigma_0\})$ に対し,

$$(\forall j < \mathrm{lh}(\lambda(\mathrm{PA}; \langle b+1, 0\rangle)))[\Phi_{e_0}(f \oplus r')(j) \downarrow= \lambda(\mathrm{PA}; \langle b+1, 0\rangle))(j)]$$

が成立する. $i_0 \in \omega$ を $\sigma_0 \subset \lambda(\mathrm{PA}; b+1)\lambda(S_{\langle b+1,0\rangle}; i_0)$ を満たすものとして取る.

$$p_1 \in \lambda(\mathrm{PA}; b+1)\lambda(S_{\langle b+1,0\rangle}; i_0)S_{\langle b+1,1\rangle}$$

を一つ取る. 先の作業と同様にして, $e_1 \le b$, $\sigma_1 \subset p_1$, $i_1 \in \omega$ を

$$\lambda(\mathrm{PA}; \langle b+1, 1\rangle) \subset \Phi_{e_1}(p_1 \oplus r'),$$
$$(\forall f \in [\sigma_1])(\forall j < \mathrm{lh}(\lambda(\mathrm{PA}; \langle b+1, 1\rangle)))[\Phi_{e_1}(f \oplus r')(j) \downarrow= \lambda(\mathrm{PA}; \langle b+1, 1\rangle))(j)],$$
$$\sigma_1 \subset \lambda(\mathrm{PA}; b+1)\lambda(S_{\langle b+1,0\rangle}; i_0)\lambda(S_{\langle b+1,1\rangle}; i_1)$$

を満たすように取ることができる．しかし，$\lambda(\mathrm{PA};\langle b+1,0\rangle)$ と $\lambda(\mathrm{PA};\langle b+1,1\rangle))$ は比較不可能なので，$e_0 \neq e_1$ である．以下同様にして，$e_0, e_1, \cdots, e_{b+1} \leq b$ が互いに異なるように取れる．しかし，b 以下の要素は $b+1$ 個しか存在しないので矛盾である．よって，$R \not\leq_w \{r\}$ であることが分かった． □

定理 4. $\mathcal{P}_b$ はハイティング代数ではない．

Proof. 以下を満たす空でない Π^0_1 クラス $P, Q \subset 2^\omega$ と空でない Π^0_1 クラスの計算可能な列 $\{R_e\}_{e\in\omega}$ を構成すれば良い:

$$(\forall e \in \omega)[P \wedge R_e \leq_b Q], \tag{3}$$

かつ，任意の空でない Π^0_1 クラス $R \subset 2^\omega$ で $P \wedge R \leq_b Q$ を満たす R に対して，

$$(\exists e \in \omega)[R \not\geq_b R_e]. \tag{4}$$

定理 2 の $\{S_e\}_{e\in\omega}$ を取る．$P = S_0$ と定める．Q, 及び, R_e は，空でない Π^0_1 クラスの計算可能な列 $\{Q_e\}_{e\in\omega}$ を構成した後，

$$Q = \mathrm{PA} \bigwedge_{n\in\omega} Q_n, \quad R_e = \mathrm{PA} \bigwedge_{n\in\omega\setminus\{e\}} Q_n$$

と定める．$\{Q_e\}_{e\in\omega}$ は，次を満たすように構成される: 各 $b \in \omega$ に対して，

$$(\exists \sigma \in 2^{<\omega})[Q_b = \sigma(P \vee S_{b+1})] \tag{5}$$

かつ

$$(\forall q \in \lambda(\mathrm{PA};b)Q_b)(\forall e \leq b)[\neg(\Phi_e(q)\downarrow\in 0P)]. \tag{6}$$

Q_b の構成: Q_b の二分岐木 T を再帰的に定義する．各ステージ $s \in \omega$ で $T \cap 2^s$ の要素を決定する．補助的に $x(s) \in \omega$ と $\sigma(s) \in 2^{<\omega}$ を構成する．2^s で長さ s の二進有限列全体の集合を表す．
ステージ 0. $T \cap 2^0 = \{\emptyset\}$, $x(0) = 0$, $\sigma(0) = \emptyset$ と定める．
ステージ $s+1$.

$$(\exists \sigma \in T \cap 2^s)(\exists e \leq b)(\exists \tau \in (0T_P) \cap 2^{x(s)+1})(\forall i \leq x(s))[\Phi_{e,s}(\lambda(\mathrm{PA};b)\sigma)(i)\downarrow= \tau(i)] \tag{7}$$

が成立するかかどうかを判定する．成立するなら，そのような $\sigma \in T \cap 2^s$ を一つ取り，

$$T \cap 2^{s+1} = \{\sigma 0\}, \quad x(s+1) = x(s)+1, \quad \sigma(s+1) = \sigma 0$$

と定める．成立しないなら，

$$T \cap 2^{s+1} = (\sigma(s) T_{P\vee S_{b+1}}) \cap 2^{s+1}, \quad x(s+1) = x(s), \quad \sigma(s+1) = \sigma(s)$$

と定める，但し，$\sigma(s)T_{P\vee S_{b+1}} = \{\sigma(s)\tau \mid \tau \in T_{P\vee S_{b+1}}\}$ とする．以上で構成は終了である．
s に関する帰納法により，簡単に，

$$T \cap 2^s = (\sigma(s) T_{P\vee S_{b+1}}) \cap 2^s, \quad x(s) \leq x(s+1), \quad \sigma(s) \subset \sigma(s+1)$$

であることが示される．次に，$x = \lim_{s\to\infty} x(s)$, $\sigma = \lim_{s\to\infty}\sigma(s)$ が有限であることを示す．もし，そうでなければ，(7) が無限回のステージで成立することになる．b より少ない要素は有限個であるから，ある $e \le b$ が存在して，無限回のステージで (7) が e によって成立する．すると，(7) より，$\Phi(\lambda(\mathrm{PA};b)\sigma) \in P$ となる．$\Phi(\lambda(\mathrm{PA};b)\sigma)$ は計算可能であるが，P は計算可能な要素を持たないから矛盾である．よって，x, σ は有限である．これにより，(5) と (6) が成立することは明らか．

(3) が成立することを示す．任意に $e \in \omega$ を取る．Q_e について，(5) を満たす $\sigma \in 2^{<\omega}$ を取る．k_0 を次のような計算可能汎関数のインデックスとする: 入力 $q \in \omega^\omega$ に対し，$1q$ を出力とする．また，k_1 を次のような計算可能汎関数のインデックスとする: 入力 $q \in \omega^\omega$ に対し，$\lambda(\mathrm{PA};e)\sigma(p\oplus r) = q$ を満たす p, r を計算していき，$0p$ を出力する．$b = \max\{k_0, k_1\}$ と定めれば，

$$(\forall q \in Q)(\exists i \le b)[\Phi_i(q)\downarrow \in P \wedge R_e]$$

が成立する．

最後に，任意の空でない Π^0_1 クラス $R \subset 2^\omega$ で $P \wedge R \le_b Q$ を満たす R に対し，(4) が成立することを示す．$b \in \omega$ を

$$(\forall q \in Q)(\exists e \le b)[\Phi_e(q)\downarrow \in P \wedge R]$$

を満たす自然数であるとする．$R \not\ge_b R_b$ を示す．$q \in \lambda(\mathrm{PA};b)Q_b$ を取る．(6) より，$r \in R$ が存在して，$q \ge_T r$ である．ところで，定理 2 の性質から，$\{q\} \not\ge_w R_b$ である．したがって，$\{r\} \not\ge_w R_b$．したがって，$R \not\ge_b R_b$ が成り立つ． □

参考文献

[1] Christopher P. Alfeld, Classifying the branching degrees in the Medvedev lattice of Π^0_1 classes, Notre Dame Journal of Formal Logic, **49** (2008), 227-243.

[2] Kojiro Higuchi, Effective closed mass problems and intuitionism, to appear.

[3] Kojiro Higuchi and Takayuki Kihara, Notions of Reducibility for Mass Problems, Mathematical Theory and Computational Practice, Local Proceedings of Fifth Conference on Computability in Europe, CiE 2009, Extended Abstracts (2009), 176-185.

[4] Carl G. Jockusch, Jr. and Robert I. Soare, Π^0_1 classes and degrees of theories, Transactions of the American Mathematical Society, **173** (1972), 35-56.

[5] Takayuki Kihara, Degree structures of mass problems and formal systems of Ramsey-type theorems, Master's thesis, Tohoku University, 2009.

[6] Andrei N. Kolmogorov, Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Mathematische Zeitschrift, **35** (1932), 58-65.

[7] Yuri T. Medvedev, Degrees of difficulty of the mass problems, Doklady Akademii Nauk SSSR, n.s., **104** (1955), 501-504, in Russian.

[8] Yuri T. Medvedev, Finite problems, Doklady Akademii Nauk SSSR, n.s., **142** (1962), 1015-1018, in Russian.

[9] Albert A. Muchnik, On strong and weak reducibilities of algorithmic problems, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **4** (1963), 1328-1341, in Russian.

[10] Stephen G. Simpson, An extension of the recursively enumerable Turing degrees, Journal of the London Mathematical Society, **75** (2007), 287-297.

[11] Stephen G. Simpson, Mass problems and almost everywhere domination, Mathematical Logic Quarterly, **53** (2007), 483-492.

[12] Stephen G. Simpson, Mass problems and intuitionism, Notre Dame Journal of Formal Logic, **49** (2008), 127-136.

[13] Stephen G. Simpson, Mass problems and randomness, Bulletin of Symbolic Logic, **11** (2005), 1-27.

[14] Stephen G. Simpson, Π^0_1 sets and models of WKL_0, in [15], 352-378, 2005.

[15] Stephen G. Simpson, editor. Reverse Mathematics 2001, Number 21 in Lecture Notes in Logic, Association for Symbolic Logic, 2005.

[16] Elena Z. Skvortsova, A faithful interpretation of the intuitionistic propositional calculus by means of an initial segment of the Medvedev lattice, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **29** (1988), 171-178, in Russian.

[17] Andrea Sorbi, Some remarks on the algebraic structure of the Medvedev lattice, Journal of Symbolic Logic, **55** (1990), 831-853.

[18] Andrea Sorbi, Some quotient lattices of the Medvedev lattice, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **37** (1991), 167-182.

[19] Andrea Sorbi and Sebastiaan A. Terwijn, Intermediate logics and factors of the Medvedev lattice, Annals of Pure and Applied Logic, **155** (2008), 69-85.

[20] Sebastiaan A. Terwijn, The Medvedev lattice of computably closed sets, Archive for Mathematical Logic, **45** (2006), 179-190.